

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	01 – 11 – 2025

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\text{σύνολο } \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\} \text{ και ισχύει: } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

A3. α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 2

β) Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Να ορίσετε την συνάρτηση f' , δηλαδή την **παράγωγο της f** .

Μονάδες 2

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$, όταν $0 < \alpha < 1$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

γ) Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε **δεν** είναι και συνεχής στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έχει ρίζα $x_0 \in (a, b)$, τότε ισχύει πάντα $f(a)f(b) < 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha - \frac{10}{x^2 + 1} & , x < 1 \\ 2\sqrt{x-1} + \beta & , x \geq 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η

γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -2 .

B1. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 2 + 4 = 6

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $A_1 = [1, +\infty)$ και ο τύπος της αντίστροφης

$$\text{είναι ο } f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 13), x \geq -3.$$

Μονάδες 3 + 4 = 7

B3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, -1)$.

Μονάδες 5

B4. (i) Να δείξετε ότι $(f^{-1})'(-1) = 1$.

(ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f^{-1}(x)}{x+1} - \frac{2x+2}{(x+1)^2} \right)$.

Μονάδες 3 + 4 = 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$.

Γ1. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 3 + 3 = 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{συν}(f(x)) - 1}{f(x)} = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right] = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \sqrt{f^2(x) + f(x)} \right] = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες 2 + 3 + 3 = 8

Γ3. i) Να βρείτε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία:

$$g(x) = f'(x) + (e^x + 1)f''(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(3h)}{h} = -1.$

Μονάδες 2 + 4 = 6

Γ4. Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{3f'(x_1) + 2f'(x_2)}{5}$

έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (x_1, x_2).$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ για την οποία

ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 + 2x - 11}{x^2 - 4} = \frac{9}{4}$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(2) = f'(2) = 3.$

Μονάδες 3 + 3 = 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^4 + f'(x)x^{2025}] = -\infty$ με $\alpha \neq 2.$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(g \circ f)(x) - g(3)}{x - 2} = 1,$ όταν γνωρίζουμε ότι $g'(3) = \frac{1}{3}.$

Μονάδες 3 + 4 = 7

Έστω επιπλέον η συνεχής συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$h^2(x) = 4e^x h(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } h(0) = 4.$$

Δ3. Να βρείτε τη συνάρτηση $h.$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{h(x)}{2x-1} + \frac{f'(x)}{x} = 0,$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0,1).$

Μονάδες 6